

Calculul Geometric Neliniar al Structurilor

CURS 2: (Ipoteze de calcul; Ecuatiile de echilibru)

1. Ipoteze de calcul

Neliniaritatea geometrica este exprimata prin impunerea conditiilor de echilibru dintre incarcarea exterioara si rezultanta eforturilor sectionale pe *configuratia deformata a structurii* exprimandu-se prin relatii neliniare. Relatiile neliniare pot fi stabilite intre eforturi si deplasari sau intre deplasari si deformatiile structurii sau a elementului. De regula in calculul geometric neliniar, *marimea deplasarilor* devine importanta avand ca efect modificarea rigiditatii barelor sau a structurii in ansamblul ei. In acest sens putem discuta de un *efect local al neliniaritatii geometrice*, maifestat la nivel de bara (element) prin impunerea conditiei de echilibru in prezenta fortei axiale, pe forma deplasata (deformata a elementului). De asemenea, *efectul global al neliniaritatii geometrice*, se manifesta la nivelul structurii, in ansamblul ei, si presupune exprimarea echilibrului pe configuratia deformata a structurii, la un anumit nivel al incarcarilor exterioare. In ceea ce priveste *marimea deformatiilor*, acestea pot fi considerate mici, ipoteza reprezentativa pentru fenomenele reale intalnite in cazul structurilor ingineresti (structuri in cadre din otel, beton armat sau compozite otel-beton, etc) a caror raspuns chiar intr-un domeniu post-critic avansat este caracterizat prin *deplasari mari dar deformatii mici* sau moderate. In diferite formulari ale calculului geometric neliniar, pot fi admise urmatoarele ipoteze uzuale.

- a. *Ipoteza deformatiilor unghiulare mici in sectiune* (rotiri sectionale mici). In acest caz pentru o bara deformata expresia exacta a curburii sectionale:

$$\phi = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 v / \partial x^2}{\left[1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (\text{a1})$$

se poate simplifica neglijand infinitul mic de ordin superior $\left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \ll 1$ rezultand urmatoarea expresie pentru curbura:

$$\phi = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (\text{a2})$$

- b. Materialul este continuu, omogen, izotrop *avand comportare elastica* in conformitate cu legea lui Hooke.
- c. Fortele isi pastreaza directiile in procesul de deformare al structurii (*forte conservative*).
- d. *Fora axiala este constanta in lungul axei barei* si este definita prin referinta la directia tangentei la axa nedeformata a barei.
- e. *Scurtarea barelor din incovoiere* si uneori din forta axiala se neglijeaza.

2. Ecuatiile de echilibru a barei drepte in calculul geometric neliniar

Se considera bara dreapta (Fig. 1) cu sectiune constanta (i,j) , de ungime L , raportata la sistemul de coordonate de baza (*bara simplu rezemata*) solicitata in interiorul ei prin aplicarea fortei uniform distribuite q si la capete prin momentele incovoietoare M_i si M_j respectiv forta axiala N . Bara in configuratia deformata este de asemenea reprezentata in Figura 1. Bara se considera avand imperfectiuni geometrice reprezentate prin abaterea de la rectiliniaritate a barei descrise prin functii analitice, $v_0(x)$. Elementul infinitesimal de lungime dx , izolat din bara deformata din actiunile exterioare si imperfectiunile geometrice, este de asemenea reprezentat in Fig. 1. In baza ipotezelor asumate mai sus si *in urma neglijarii infinitilor mici de ordin superior*, considerand de asemenea ca eforturile si deplasările sunt asimilate prin functii continue si derivabile in lungul elementului (*deci pot fi dezvoltate in mod aproximativ prin serii Taylor*), se exprima echilibrul elementului infinitesimal, rezultand relatiile diferentiale intre actiuni si eforturi in calculul geometric neliniar. Se face mentiunea ca, in prezenta imperfectiunilor geometrice *deplasările transversale se definesc astfel*: (i) deplasarea data de imperfectiunea geometrica $v_0(x)$ raportata la axa dreapta a barei nedeformata; (ii) deplasarea, $v(x)$, data de aplicarea actiunilor exterioare (N, M) si care se raporteaza la axa deformata a barei in prezenta imperfectiunilor geometrice, respectiv (iii) deplasarea totala prin referire la axa dreapta a barei nedeformata $v_t(x)=v_0(x)+v(x)$, (Fig. 1). Astfel exprimand echilibrul pe directia orizontala rezulta:

$$\sum F_x = N(x) - N(x) - \frac{\partial N(x)}{\partial x} dx = 0 \quad (1)$$

obtinandu-se:

$$\frac{\partial N(x)}{\partial x} = 0 \rightarrow N(x) = constant \quad (2E)$$

Forța axială este constantă în lungul axei barei și este definită prin referire la direcția tangentei la axa barei nedeformată și fără imperfecțiuni.

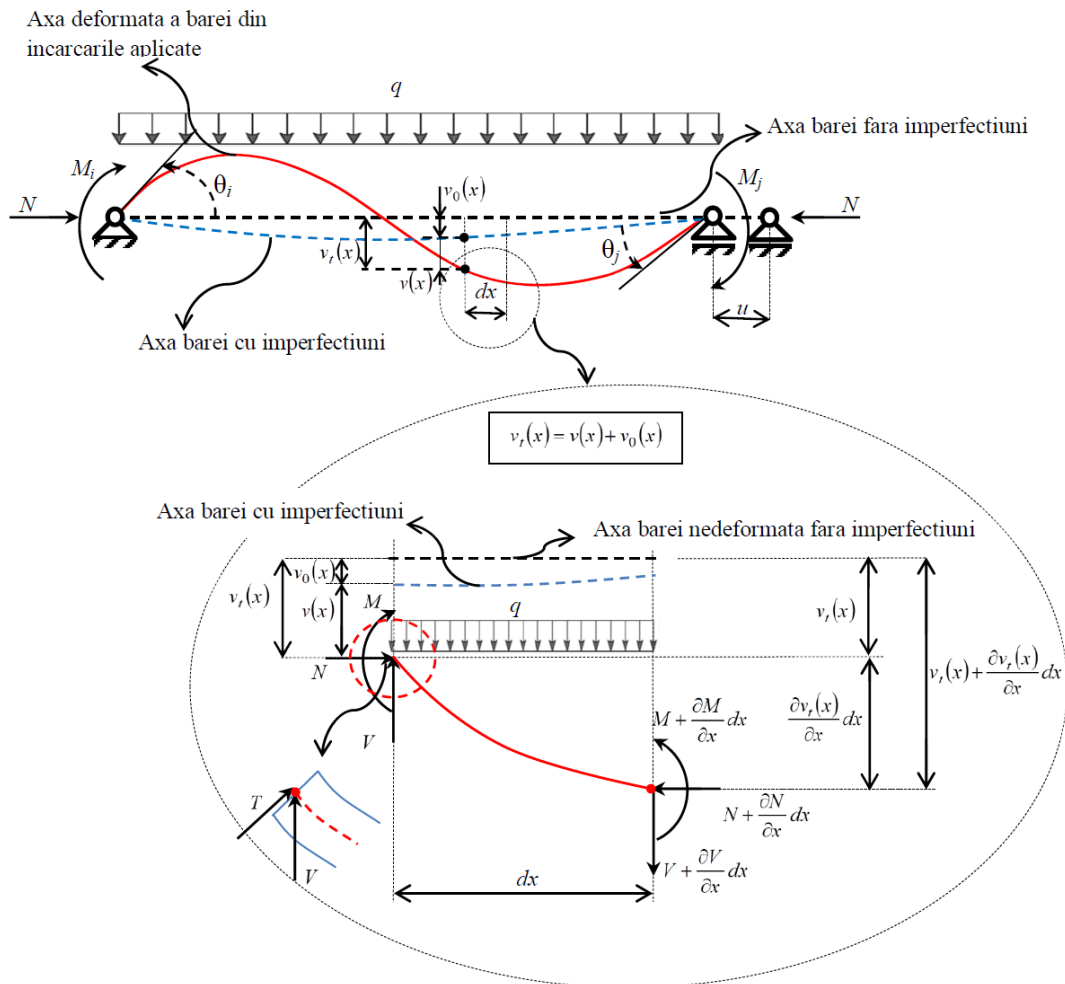


Figura 1: Ecuațiile de echilibru a barei drepte în calculul geometric neliniar.

În mod similar exprimând echilibrul pe direcție verticală, rezultă:

$$\sum F_y = V(x) - V(x) - \frac{\partial V(x)}{\partial x} dx - q dx = 0 \quad (3)$$

sau:

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -q \quad (4E)$$

relație ce exprimă legătura între forța tăietoare normală la axa barei nedeformate și încărcarea normală aplicată pe bară, și care este echivalentă cu cea din calculul geometric liniar. Prin exprimarea echilibrului față de capătul din dreapta al elementului infinitesimal, rezultă:

$$\sum M = V(x)dx + N \frac{\partial v_t(x)}{\partial x} dx + M(x) - q \frac{dx^2}{2} - \frac{\partial M(x)}{\partial x} dx - M(x) = 0 \quad (5)$$

si dupa simplificari si tinand cont de faptul ca $q \frac{dx^2}{2}$ este infinit mic de ordin superior relatia devine:

$$\frac{\partial M(x)}{\partial x} = V(x) + N \frac{\partial v_t(x)}{\partial x} \quad (6E)$$

Intrucat deplasarea totala raportata la axa dreapta, initiala a barei fara imperfectiuni se exprima:

$$v_t(x) = v_0(x) + v(x) \quad (7)$$

relatia (5) se mai scrie:

$$\frac{\partial M(x)}{\partial x} = V(x) + N \left(\frac{\partial v_0(x)}{\partial x} + \frac{\partial v(x)}{\partial x} \right) \quad (8)$$

Relatia (6E) defineste faptul ca forta taietoare aditionala indusa de forta axiala este proportionala cu rotirea totala ($\theta_t = \frac{dv_t(x)}{dx}$) in sectiune incluzand imperfectiunile geometrice initiale. Prin urmare forta taietoare $T = dM(x)/dx$ exprimata in sectiune ca si normala la axa deformata (cuprinsa in planul sectiunii deformate) (Fig. 1) este relationata cu forta taietoare verticala V , exprimata ca si normala la axa initiala nedeformata a barei astfel (cuprinse in planul sectiunii nedeformate):

$$T(x) = \frac{\partial M(x)}{\partial x} = V(x) + N \left(\frac{\partial v_0(x)}{\partial x} + \frac{\partial v(x)}{\partial x} \right) \quad (9)$$

Acceptand ipoteza micilor rotiri in sectiune, ($\left(\frac{dv(x)}{dx}\right)^2 \ll 1$) relatia intre curbura sectiunii datorata

incarcarii aplicate ($\phi = \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial x}$) si momentul incovoietor aplicat (M) se scrie:

$$M(x) = -EI \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \quad (10)$$

unde $v(x)$ reprezinta deplasarea transversala prin referire la axa initiala a barei cu imperfectiuni, θ rotirea sectionala din incarcari (excluse rotirea din imperfectiunea geometrica) (Fig. 1), iar EI reprezinta produsul intre modulul de elasticitate longitudinal E si mometul de inertie sectional I (modulul de rigiditate la incovoiere). In rezumat, ecuatiile de echilibru (2E, 4E, 6E) derivate

prin exprimarea echilibrului infinitesimal relateaza eforturile N , V , si M prin referire la *sectiunea normala pe axa nedeformata barei (fara imperfectiuni)*. De asemenea ipoteza Bernoulli, se rasfrange asupra modului de exprimare a rotirii sectionale ($\theta_t = \frac{\partial v_t(x)}{\partial x}$), *sectiunea ramane plana si normala la axa barei deformate* (rotirea sectiunii este egala cu panta (tangenta) la axa medie deformata). Aceasta relationare nu mai este valabila in cazul in care se considera efectul deformatiilor de lunecare (efectul fortei taietoare) asa cum va fi detaliat in sub-capitolul 2.1 al acestui curs.

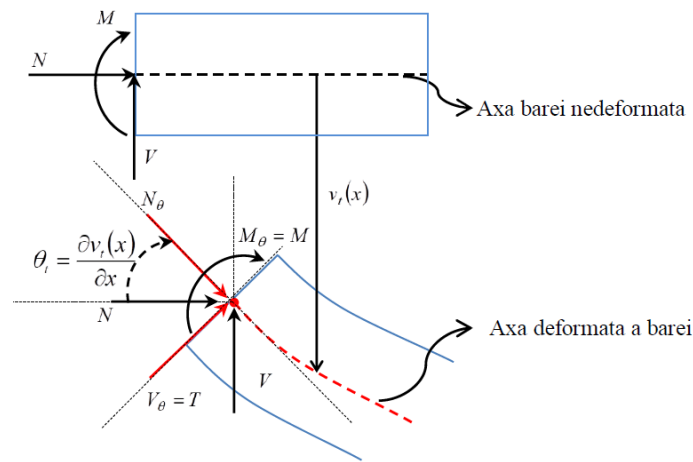


Figura 2: Reprezentarea eforturilor pe axa deformata a barei.

Relatiile intre setul de eforturi referentiate fata de sectiunea normala la axa nedeformata (N , V , M) si eforturile definite prin referire la axa medie deformata a barei ($N_\theta, V_\theta, M_\theta$) se pot exprima astfel (Fig. 2):

$$\begin{aligned} N_\theta &= N \cos \theta - V \sin \theta \\ V_\theta &= V \cos \theta + N \sin \theta \\ M_\theta &= M \end{aligned} \quad (11)$$

iar pentru θ mic (se admite ipoteza rotirilor mici sectionale), $\cos \theta \approx 1$; $\sin \theta \approx \theta$ relatiile (11) se aproximeaza astfel:

$$\begin{aligned} N_\theta &= N - V\theta \\ V_\theta &= V + N\theta \\ M_\theta &= M \end{aligned} \quad (12)$$

de unde se constata, asa cum s-a anticipat deja, faptul ca:

$$V_\theta = T \left(= \frac{\partial M}{\partial x} \right) = V + N \frac{\partial v_t}{\partial x} \quad (13)$$

Mentionam inca o data faptul ca relatiile de mai sus caracterizeaza echilibrul elementului de bara in ipoteza Bernoulli, formularea fiind cunoscuta sub denumirea de *formularea Euler-Bernoulli*.

Prin derivarea relatiei (8), tinand cont de ecuatiile de echilibru (4E) si ecuatiile constitutive (10) obtinem:

$$\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} + \frac{N}{EI} M(x) = -q + N \frac{\partial^2 v_0(x)}{\partial x^2} \quad (14)$$

care reprezinta ecuatiile diferentiale ce exprima echilibrul barei drepte cu imperfectiuni geometrice in calculul geometric neliniar in *modelul Euler-Bernoulli*.

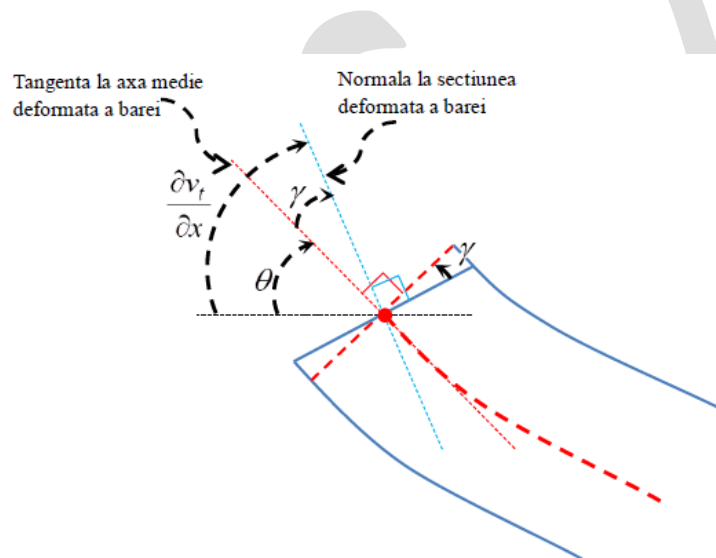


Figura 3: Efectul deformatiilor de lunecare.

2.1 Efectul deformatiilor de lunecare din forta taietoare

Este important de mentionat ca in prezenta deformatiilor de lunecare, provenite din actiunea fortei taietoare, rotirea sectionala, $\frac{\partial v_t(x)}{\partial x}$, nu mai este egala cu panta (tangenta) la axa medie deformata, θ , deformatia unghiulara γ aditionala intrudusa de forta taietoare definind o rotire suplimentara (Fig. 3).

Astfel in acest caz deplasarea totala, v_t , este compusa din deplasarea datorata incovoierii din momentul incovoietor, v_B , deplasarea din forta taietoare, v_{SH} , si deplasarea din imperfectiunea geometrica, v_0 :

$$v_t(x) = v_B(x) + v_{SH}(x) + v_0(x) \quad (15)$$

iar rotirea totala in acest caz este:

$$\frac{\partial v_t(x)}{\partial x} = \frac{\partial v_B(x)}{\partial x} + \frac{\partial v_{SH}(x)}{\partial x} + \frac{\partial v_0(x)}{\partial x} \quad (16)$$

In aceasta situatie exista doua abordari, mult discutate in literatura de specialitate [3], cu privire la includerea efectului fortei taietoare in ecuatiile de echilibru a elementului de bara in calculul geometric neliniar. *Modelul Engesser* defineste o forta taietoare T_E calculata ca si in statica standard ca derivata momentului incovoietor in raport cu variabila x , si relationata cu ecuatia de echilibru (6E), relatia acesteia cu forta V si forta axiala N fiind definite de ecuatia (Fig. 4):

$$T_E = \frac{\partial M}{\partial x} = V + N \frac{\partial v_t}{\partial x} \quad (17)$$

respectiv *modelul Haringx* care defineste forta taietoare T_H distinct in raport cu derivata momentului ($dM(x)/dx$), componenta aditionala datorata fortei axiale fiind proportionala cu rotirea din incovoiere si imperfectiunea geometrica, relatia acesteia cu forta verticala V si forta axiala N fiind (Fig. 5):

$$T_H = V + N \left(\frac{\partial v_B}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \quad (18)$$

Astfel in modelul Engesser (Fig. 4), numit in continuare *modelul Timoshenko-Engesser*, ecuatiile de echilibru se exprima astfel:

$$\sum M = 0 \Leftrightarrow V = \frac{\partial M}{\partial x} - N \frac{\partial v_t}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial x} - N \left(\frac{\partial v_B}{\partial x} + \frac{\partial v_{SH}}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \quad (19)$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = -q \Leftrightarrow \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - N \frac{\partial^2 v_t}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - N \left(\frac{\partial^2 v_B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{SH}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) = -q \quad (20)$$

Momentul incovoietor si forta taietoare se exprima in baza relatiilor constitutive:

$$M(x) = -EI \frac{\partial^2 v_B(x)}{\partial x^2} \quad (21)$$

$$T_E = GA_s \frac{\partial v_{SH}(x)}{\partial x} \quad (22)$$

si cum $T_E = \frac{\partial M(x)}{\partial x}$ si $\frac{\partial T_E}{\partial x} = \frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2}$ rezulta:

$$GA_s \frac{\partial^2 v_{SH}(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} \quad (23)$$

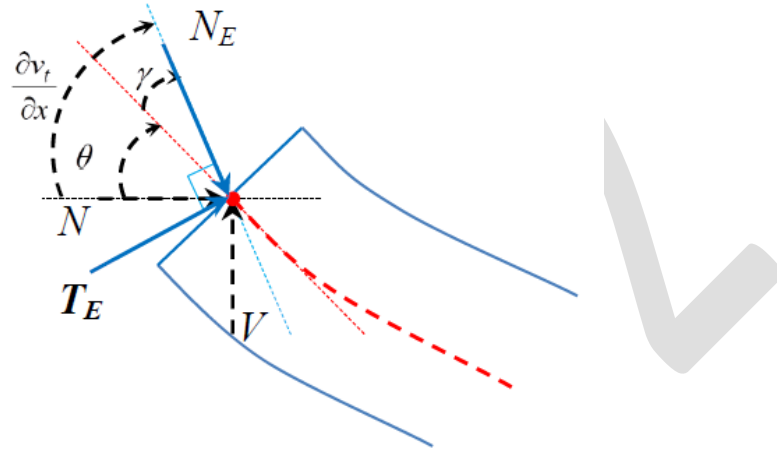


Figura 4: Modelul Engesser.

Considerand relatiile (21), (22) si (23) in relatia (20) rezulta:

$$\left(1 - \frac{N}{GA_s}\right) \frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} + \frac{N}{EI} M(x) = -q + N \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \quad (24)$$

sau:

$$\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} + \frac{N}{EI} \left(\frac{1}{1 - \frac{N}{GA_s}} \right) M(x) = \left(-q + N \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) \left(\frac{1}{1 - \frac{N}{GA_s}} \right) \quad (25)$$

care reprezinta ecuatia diferentiala ce exprima echilibrul barei in calculul geometric nelinier cu considerarea deformatiilor de lunecare din forta taietoare in modelul Timoshenko-Engesser.

In modelul Haringx (Fig. 5) considerand ca:

$$T_H = V + N \left(\frac{\partial v_B}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \quad (26)$$

si ca:

$$T_H = GA_s \frac{\partial v_{SH}(x)}{\partial x} \quad (27)$$

rezulta:

$$V + N \left(\frac{\partial v_B}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) = GA_s \frac{\partial v_{SH}(x)}{\partial x} \quad (28)$$

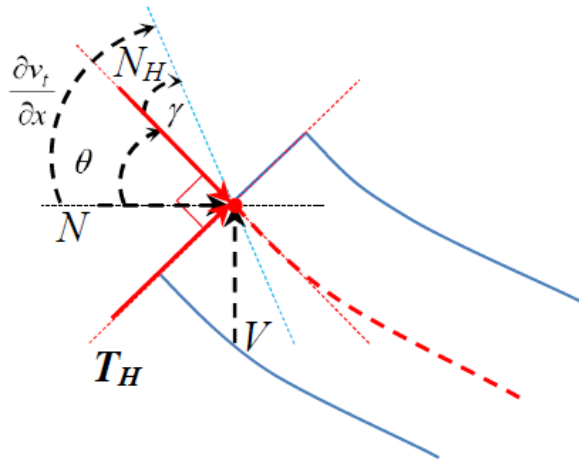


Figura 5: Modelul Haringx.

Derivand relatia de mai sus:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + N \left(\frac{\partial^2 v_B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) = GA_s \frac{\partial^2 v_{SH}(x)}{\partial x^2} \quad (29)$$

si cum:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -q \\ \frac{\partial^2 v_B}{\partial x^2} &= -\frac{M}{EI} \\ \frac{\partial v_{SH}}{\partial x} &= \frac{\partial v_t}{\partial x} - \frac{\partial v_B}{\partial x} - \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{aligned} \quad (30)$$

si derivand ecuatia de echilibru (6E)

$$\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} = -q + N \frac{\partial^2 v_t(x)}{\partial x^2} \quad (31)$$

ecuatia (29) se rescrie:

$$-q - \frac{N}{EI} M(x) + N \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = GA_s \left(\frac{q + \frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2}}{N} + \frac{M(x)}{EI} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) \quad (32)$$

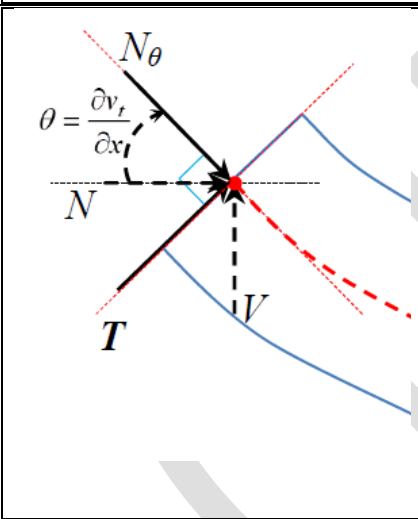
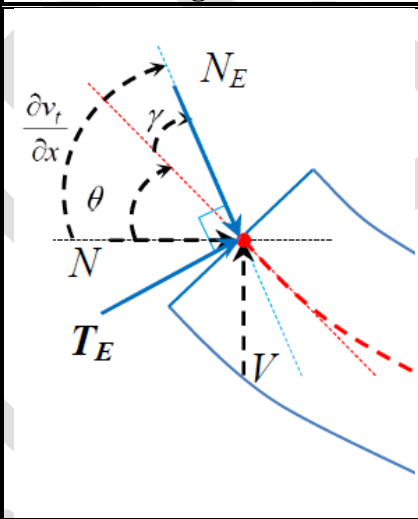
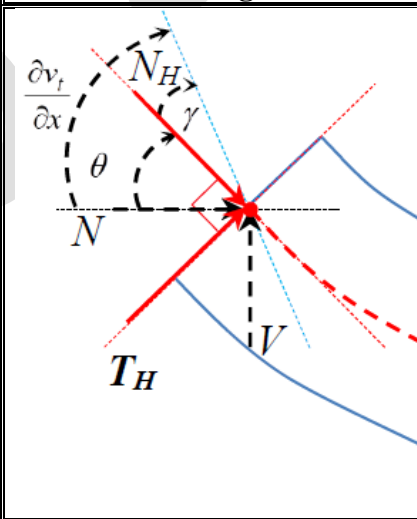
sau

$$\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} + \frac{N}{EI} \left(1 + \frac{N}{GA_s} \right) M(x) = \left(-q + N \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) \left(1 + \frac{N}{GA_s} \right) \quad (33)$$

care reprezinta ecuatia diferentiala ce exprima echilibrul barei in calculul geometric nelinier cu considerarea deformatiilor de lunecare din forta taietoare in modelul Timoshenko-Haringx.

In rezumat principalele modele utilizate in exprimarea echilibrului barei drepte cu imperfectiuni geometrice in calculul geometric nelinier sunt sistematizate in Tabelul 1.

Tabelul 1: Modele utilizate in calculul geometric nelinair al barei drepte.

Modelul Euler-Bernoulli	Modelul Timoshenko-Engesser	Modelul Timoshenko-Haringx
		
Ecuatia diferentiala de echilibru		
<i>Cu imperfectiuni geometrice v_0(x)</i>		
$\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} + \frac{N}{EI} M(x) = -q + N \frac{\partial^2 v_0(x)}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} + \frac{N}{EI} \left(\frac{1}{1 - \frac{N}{GA_s}} \right) M(x) = \left(-q + N \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) \left(\frac{1}{1 - \frac{N}{GA_s}} \right)$	$\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} + \frac{N}{EI} \left(1 + \frac{N}{GA_s} \right) M(x) = \left(-q + N \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) \left(1 + \frac{N}{GA_s} \right)$
<i>Fara imperfectiuni geometrice</i>		
$\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} + \frac{N}{EI} M(x) = -q$	$\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} + \frac{N}{EI} \left(\frac{1}{1 - \frac{N}{GA_s}} \right) M(x) = -q \left(\frac{1}{1 - \frac{N}{GA_s}} \right)$	$\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} + \frac{N}{EI} \left(1 + \frac{N}{GA_s} \right) M(x) = -q \left(1 + \frac{N}{GA_s} \right)$

Referinte

1. G.M. Barsan, *Dinamica si Stabilitatea Constructiilor*, 1979.
2. Chiorean, C.G., Marchis, I.V., A Second Order Flexibility Based Model for Steel Frames of Tapered Members, *J Cosntr Steel Res.*, 2017.
3. Li, X.F., Lee, K.Y., Effects of Engesser's and Haringx's Hypotheses on Buckling of Timoshenko and Higher-Order Shear-Deformable Columns, *J Struct Eng Mech (ASCE)*, 2017.

Urmeaza Cursul 3....

1. Integrarea ecuatiilor diferentiale de echilibru

- a. *Formulara in deplasari*
- a. *Formulara in momente incovoietoare*

Formulara in deplasari	Formulara in momente incovoietoare