3

METODE DE DETERMINARE A SOLUȚIEI ÎN CALCULUL ELASTO-PLASTIC DE ORDINUL AL II-LEA

3.1. INTRODUCERE

Relația matematică, extinsă la nivelul întregii structuri, ce caracterizează echilibrul static al unei structuri, poate fi scrisă astfel:

$$\Psi(\mathbf{d}) = [\mathbf{K}_s(\mathbf{d})] \cdot \mathbf{d} - \mathbf{F} = \mathbf{P}(\mathbf{d}) - \mathbf{F} = 0 \qquad (3.1)$$

în care $\mathbf{P}(\mathbf{d})$ reprezintă vectorul forțelor nodale interne ale structurii, iar $\mathbf{F}$ reprezintă vectorul forțelor nodale exterioare (inclusiv încărcările echivalente la noduri), independente de caracteristicile de deformabilitate şi de rigiditate ale elementelor componente ale structurii. În studiul comportării neliniare a structurilor interesează atât echilibrul stabil al structurii cât şi cel critic care poate fi formulat energetic prin studierea celei de a doua variație a energiei potențiale de deformație, în raport cu elementele de deformație:

$$\delta^2\Pi = \delta(\delta\Pi) = \delta\left(\delta\mathbf{d}^T \cdot \Psi(\mathbf{d})\right) = \delta\mathbf{d}^T \cdot \delta\Psi = \delta\mathbf{d}^T \cdot \mathbf{K}_T(\mathbf{d}) \cdot \delta\mathbf{d} \qquad (3.2)$$

Forma patratică (3.2) este pozitivă dacă matricea tangentă a rigidităților este pozitiv definită. O condiție necesară pentru stabilitatea echilibrului este deci ca toate elementele diagonalei principale a matricei de rigiditate tangente a întregii structurii, $\mathbf{K}_T$, să fie pozitive.

Deoarece caracteristicile de rigiditate şi deformabilitate ale elementelor structurii nu sunt cunoscute inițial (pentru o anumită mărime totală a vectorului forțelor nodale) rezultă că soluția ecuației matriceale (3.1) nu se poate obține direct. Determinarea soluției în calculul elasto-plastic de ordinul al II-lea se face printr-o succesiune de cicluri de calcul, controlul soluției constând în îndeplinirea concomitentă a ambelor condiții ce caracterizează situația de echilibru: compatibilitatea deformatei şi echilibrul static al nodurilor. După modul în care se efectuează calculul, metodele se împart în: metode iterative directe; metode simple incrementale; metode incremental-iterative.

Metodele iterative se utilizează în principal când calculul structurii se execută direct pentru mărimile totale ale sarcinilor date, cuprinse în vectorul $\mathbf{F}$, utilizând fie matricea de rigiditate secantă fie matricea de rigiditate tangentă şi secantă. Sarcina critică corespunzătoare producerii colapsului structurii poate fi găsită în acest caz intr-o etapă de iterație a unuia dintre nivele de încărcare, când efectul de colaps structural se manifestă printr-o creştere considerabilă a valorilor deplasărilor, sau chiar o descompunere a procesului de calcul în totalitatea lui. Dacă producerea colapsului nu este aşteptată, intregul proces de iterație poate fi aplicat pentru un singur nivel de încărcare, cel maxim. În această situatie, convergenta configurației de echilibru poate fi acceptată printr-o condiție uşoară a tolerantei. Altfel, toleranța convergenței trebuie să fie severă, iar în această situație efortul de calcul este mare şi costisitor fiind necesar ca în fiecare ciclu iterativ să fie rezolvat sistemul ecuațiilor structurale. Pe de altă parte, este important de semnalat că pot apărea dificultăți de convergență în stabilirea corectă a configurației de echilibru, când nivelul de încărcare se află în vecinatatea sarcinii critice. În locul unei configurații de echilibru stabil, convergența poate indica o altă configurație de echilibru, de astă dată nestabil, ceea ce constiutuie un rezultat eronat, chiar dacă ambele configurații sunt de echilibru. De exemplu, aplicată unei structuri pleoştite dublu încastrată (v. ex.2 cap. 5), metoda poate converge spre configurația stabilă obținută după fenomenul de *snap-through*, adică configurației de echilibru instabil, cu toate că era de aşteptat echilibrul stabil. Această metodă prezintă şi un alt inconvenient şi anume faptul că nu poate fi aplicată decât în cazul sitemelor conservative.

Din aceste motive deseori sunt utilizate metode incrementale (pas cu pas) urmărindu-se o liniarizare a relației (3.1) prin alegerea unor paşi constanți pentru încărcări sau deplasări, pe parcursul cărora comportarea structurii este considerată a fi liniară, până se ajunge la nivelul de încărcare dorit (metoda paşilor controlați de încărcări) sau la limita de deformabilitate stablită (metoda paşilor controlați de deplasări). O asemenea metodă ce utilizeaza matricea tangentă a rigidităților este echivalentă cu metoda Euler de integrare numerică a unui sistem de ecuații diferențiale neliniare, din acest motiv această metodă se mai numeşte şi metoda Euler. Ea este foarte generală şi dă o descriere a stadiilor intermediare, reclamând însă mai mult timp de calculator. Având în vedere faptul ca derivata funcției $\mathbf{\Psi}$ în raport cu deplasările $\mathbf{d}$ reprezintă matricea Jacobian a sistemului neliniar (3.1) care în mecanica structurilor poartă denumirea de matrice de rigiditate tangentă a structurii pe baza relației (3.1) se obține:

$$\frac{d\mathbf{\Psi}(\mathbf{d})}{d\mathbf{d}} = \frac{d\mathbf{P}(\mathbf{d})}{d\mathbf{d}} = \mathbf{K}_T(\mathbf{d}) \tag{3.3}$$

care mai poate fi scrisă:

$$d\mathbf{P}(\mathbf{d}) = \mathbf{K}_T(\mathbf{d}) \cdot d\mathbf{d} \tag{3.4}$$

Înlocuind cantitățile infinitesimale prin creşteri finite şi ținând seama de (3.2) rezultă următoarea relație ce stă la baza paşilor calculului incremental:

$$\Delta\mathbf{P} = \Delta\mathbf{F} = \mathbf{K}_T(\mathbf{d}) \cdot \Delta\mathbf{d} \tag{3.5}$$

În acest caz trasarea curbei încărcăre-deplasare, se poate face alegând un pas constant fie pentru încărcare (fig. 3.1a) fie pentru deplasări (fig. 3.1b). De menționat faptul că utilizarea unui pas de deformație controlat permite şi studiul domeniului postcritic (echilibrul instabil al structurii), spre deosebire de cazul pasului controlat de încărcări, când trasarea curbei se opreşte la atingerea încărcării limită. Pe această cale, comportarea neliniară a structurii pe parcursul încărcării este înlocuită printr-o succesiune de intervale cu comportare liniarizată, care se îndepărtează progresiv de curba ce corespunde comportării reale. Ecartul dintre curba reală şi curba obținută este de ordinul de marime al lui $\Delta\mathbf{F}$.

O cale de reducere a abaterii constă în alegerea unor paşi de încărcăre (deplasare) mai mici, care are însă drept efect mărirea timpului de rezolvare şi de asemenea o alterare a rezultatelor numerice obțiunte ca urmare a erorilor de rotunjire generate în timpul procesului de calcul. Se pot utiliza şi metode de integrare numerică mai eficeinte, cum ar fi Runge-Kutta, care necesită însă un efort mai mare de programare. O altă cale constă în a folosi şi aici corectarea pe baza restabilirii condiției de echilibru static, odată la câteva trepte, revenind astfel la punctele situate pe curba reală, prin aplicarea unor procedee iterative. Pornind de la ecuația incrementală de echilibru (3.5), o analiză incremetal iterativă poate fi realizată pentru determinarea raspunsului structurii, această implicând trei faze principale. Prima sau etapa *predictor* implică determinarea incrementelor de deplasări pornind de la ecuația incrementală de echilibru a structurii. A doua etapă numită *corector* constă în refacerea eforturilor incrementale de la capetele elementelor componente ale strcuturii, pe baza deplasărilor incrementale obținute în faza *predictor*, eforturile rezultante din elementele structurii la sfirşitul fiecărui pas incremental fiind obținute prin cumularea tuturor eforturilor incrementale determinate înaintea şi în timpul pasului curent. În cea de-a treia etapă de *verificare* este testat echilibrul structurii pentru a se asigura convergența procesului iterativ în noua stare de deformație a structurii. Astfel, prin sumarea forțelor interne ale elementelor în fiecare nod şi compararea acestora cu încărcările exterioare poate fi calculat vectorul forțelor neechilibrate pe structura şi în cazul în care acest vector nu poate fi neglijat se repetă etapele 1 şi 2 pâna la disiparea totală a acestuia (forțele neechilibrate devin neglijabile).

In studiul comportarii neliniare a structurilor interesează atit modul de comportare a structurii pina la atingerea încărcării limită ce produce colapsul structurii cât şi modul de comportare post critic, astfel incât este necesar ca ecuația (3.1) sa fie rescrisă sub următoarea formă:

$$\mathbf{P}(\mathbf{d}) - \lambda \cdot \mathbf{F} = 0 \tag{3.6}$$

în care cu λ s-a notat factorul de încărcare corespunzător unei anumite situații de echilibru stabil sau instabil al structurii. Pentru rezolvarea acestui sistem cu n ecuații de echilibru şi (n+1) necunoscute (deplasările generalizate corespunzătoare celor n grade de libertate ale structurii respectiv λ parametrul încărcării de referință $\mathbf{F}$), o ecuație adițională de constrângere trebuie introdusă. În general această ecuație poate fi scrisă sub următoarea formă:

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot \left(d_k^m - d_k^{m-1}\right)^2 + \beta_{n+1} \cdot \alpha^2 \cdot \left(\lambda^m - \lambda^{m-1}\right)^2 = c^2 \quad (3.7)$$

în care α reprezintă un coeficient de normalizare a dimensiunilor încărcărilor cu cel al deplasărilor, indicele superior *m* semnifică pasul corespunzător poziției de echilibru curente, *c* este o valoare prescrisă a lungimii de arc dintre două puncte succesive *m* şi *m*-1 de echilibru, iar coeficienții β_k (k=1,2,3,…,n+1) sunt parametrii de control ai algoritmului de rezolvare a sistemului (3.107). După cum se poate observa în figura 3.1.a, ecuația (3.7) în cazul în care $\beta_k = 0 \quad (k = 1,2,...n)$ şi $\beta_{n+1} = 1$ corespunde metodei paşilor controlați de încărcări; ecuația de constrângere corespunzătoare metodei paşilor controlați de deplasări se obține prin particularizarea ecuației (3.7) dacă $\beta_k = 1$ şi $\beta_i = 0 \quad (i \neq k)$ (fig. 3.1.b); iar metoda paşilor controlați de lungimea de arc (arc-length control) corespunde situației în care toți parametri β_k =1 (fig. 3.1.c).

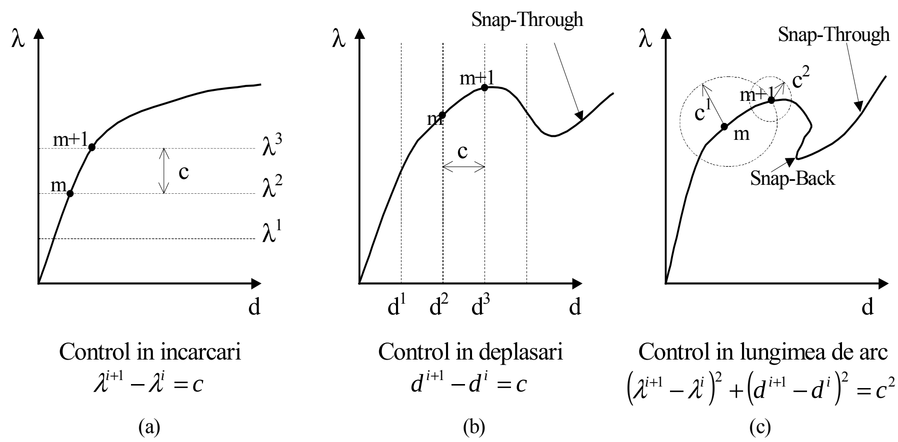

Fig. 3.1 Ecuații de constrângere pentru diferite metode de control pentru trasarea curbei încărcăre -deplasare.

În analiza neliniară a structurilor pe baza unei metode incremental-iterative care sa țină seama de neliniaritațile introduse de modificarea geometriei structurii şi/sau de neliniaritatea fizică a materialului, este foarte important de a se incorpora o procedură eficientă pentru determinarea răspunsului structurii după atingerea încărcării limită corespunzătoare colapsului total al structurii sau cea corespunzătoare ieşirii din lucru a unor elemente structurale dar care nu atrag după sine colapsul total al structurii. Spre exemplu, în cazul structurilor din beton armat există mai multe asemenea puncte aflate sub încărcărea limita, datorate ieşirilor succesive din lucru a unor elemente dar care nu atrag după sine colapsul întregii structuri. Un algoritm eficient de a considera şi determina cu maximă acuratețe aceste puncte este foarte benefic şi deseori esențial pentru determinarea încărcării critice corespunzătoare colapsului structurii, şi a determina cu maximă acurateţe capacitatea de ductilitate şi deformaţie a structurii precum şi natura modului de cedare general al structurii.

Aplicarea unor incremente de încărcăre pozitive (metoda paşilor controlaţi de încărcări) conduce în mod natural la dificultăţi de calcul în apropierea unor valori ale încărcărilor ce produc colapsul local sau global al structurii (anumiţi termeni de pe diagonala principală a matricei de rigiditate a structurii sunt mai mici sau egal cu zero), iar aplicarea unor metode de rearanjare a acestor termeni prin intermediul unor "springuri" artificiale (Wright & Gaylor 1968; Ramm 1981) sau prin aplicarea unor metode de reducere a incrementului de încărcăre (Cope & Rao 1981; Bergan & Holand 1979; Crisfield 1982; Philips & Zienkiewicz 1976) necesită o atenţie sporită şi nu sunt întotdeauna eficiente. Problemele datorate fenomenelor de "snap-through" (dar nu şi cele de "snap-back") (v. fig.3.1.c) pot fi luate în considerare prin aplicarea metodelor paşilor controlaţi de deplasări, considerând intensitatea încărcării ca şi necunoscută (Batoz & Dhatt 1979), dar o alegere potrivită a pasului de deplasare este deosebit de dificilă în anumite situaţii.

Pentru eliminarea acestor dificultăţi mai multe metode incremental iterative au fost propuse de-a lungul timpului. Două metode propuse de Bergan au dat rezultate satisfăcătoare: metoda parametrului curent de rigiditate de identificare a punctelor limită (Bergan s. al. 1978) şi tehnica de minimizare a forţelor neechilibrate pentru ajustarea nivelului forţelor exterioare (Bergan 1980). Metodele de tip "arc-length" propuse de Riks (1972, 1979) şi Wempner (1971) au fost rafinate şi aplicate cu succes de Ramm (1981) şi Crisfield (1981, 1982, 1983, 1984) pentru o varietate mare de probleme. De asemenea sunt de amintit metodele de tip "work-increment" propuse de Bathe & Dvorkin (1983), Yang & McGuire (1985) precum şi metoda minimizării deplasărilor reziduale ("minimum residual displacement") propusă de S.L. Chan (1988). Acestea sunt doar câteva dintre metodele propuse în literatura de specialitate pentru determinarea integrală a răspunsului neliniar al structurilor: tratarea singularităţilor matricei de rigiditate ale structurii, surprinderea cu maximă acurateţe a răspunsului structurii în domeniul post critic şi a fenomenelor de "snap-through" şi "snap-back".

Eficienţa metodelor incremental-iterative depinde în mare măsura de modul în care se consideră tranziţia de la o configuraţie de echilibru static a structurii la o configuraţie de echilibru vecină a acesteia în timpul iteraţiilor. Procesul de determinare a următoarei configuraţii de echilibru (m+1) pe baza configuraţiei de echilibru de referinţa (m) este independent de configuraţiile intermediare corespunzătoare iteraţiilor din cadrul unui pas de încărcăre. În figura 3.2 sunt prezentate două modalităţi de considerare a tranziţiei de la configuraţia de echilibru (m) la configuraţia de echilibru (m+1). Prima (fig. 3.2.a) care consideră ca şi configuraţie de referinţă configuraţia deformată a structurii corespunzătoare iteraţiilor din cadrul unui pas de încărcăre, şi cea de a doua (fig. 3.2.b) care consideră o singură configuraţie de referinţă pentru toate iteraţiile din cadrul pasului respectiv de încărcăre, şi anume cea corespunzătoare configuraţiei de echilibru (m). În analiza neliniar elasto- plastică de ordinul al II-lea cea de a doua metodă este mai exactă deoarece forțele neechilibrate se determină prin raportarea la o configurație de echilibru deja determinată (m), în timp ce prima metodă determină forțele neechilibrate față de o configurație deformată a structurii intermediară, corespunzătoare unei iterații (configurație neechilibrată), ducând la o îndepărtare progresivă față de curba reală de echilibru (configurația reală de echilibru) în cazul unor valori mari ale incrementelor de încărcare. De asemenea reactualizarea tensiunilor pentru verificarea criteriilor de curgere din secțiunile elementelor finite se face mai exact în cadrul unor proceduri aparținând celei de a doua categorii.

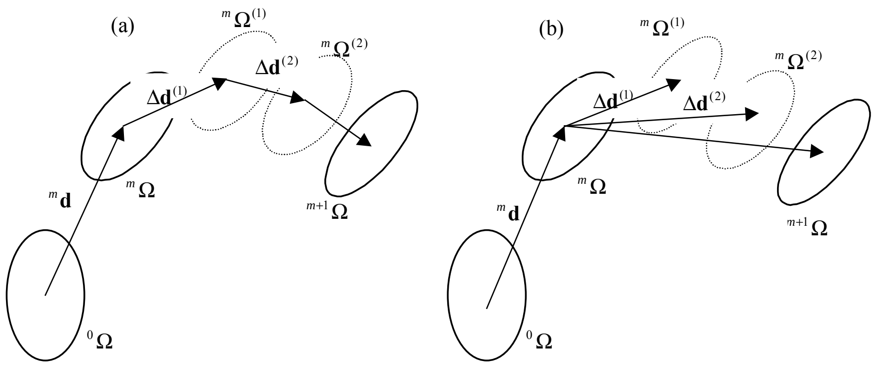

Fig. 3.2. Procedee de conducere a iterațiilor în cadrul unui increment al încărcării.

Astfel ori de câte ori interesează şi aspectul neliniarității fizice în răspunsul neliniar al structurilor este de preferat utilizarea (programarea) unor proceduri numerice din cea dea doua categorie, în ciuda simplității, sub aspectul programarii, a procedurilor numerice din prima categorie.

3.2. METODA PAŞILOR CONTROLAȚI DE ÎNCĂRCĂRI. METODA NEWTON-RAPHSON

Cea mai cunoscută metodă incremental-iterativa utilizată pentru soluționarea sistemului neliniar de ecuații (3.1) este metoda Newton-Raphson. Datorită importanței acestei metode, în cele ce urmează se prezintă formularea generala a acestui procedeu.

Echilibrul static coespunzător unui anumit nivel al forțelor exterioare (corespunzătoare pasului m) este determinat de vectorul deplasărilor nodale, $\mathbf{d}^*$, care anulează funcția:

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{d}^*\right) \equiv {}^{m}\mathbf{F} - {}^{m}\mathbf{P}(\mathbf{d}) = 0 \tag{3.8}$$

unde ${}^{m}\mathbf{P}(\mathbf{d})$ reprezintă vectorul eforturilor interioare de la capetele elementelor finite corespunzător pasului de încărcare m iar ${}^{m}\mathbf{F}$ reprezintă vectorul forțelor exterioare din nodurile elementelor finite corespunzătoare aceluiaşi pas, independent de starea de deformaţie existentă. Considerând cunoscută soluţia la iteraţia (*i*-1) din cadrul pasului *m*, prin dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei **f** în vecinătatea acestei soluţii, ${}^{m}\mathbf{d}^{(i-1)}$, rezultă:

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{d}^{*}\right)=\mathbf{f}\left({}^{m}\mathbf{d}^{(i-1)}\right)+\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{d}}\right]\Bigg|_{{}^{m}\mathbf{d}^{(i-1)}}\cdot\left(\mathbf{d}^{*}-{}^{m}\mathbf{d}^{(i-1)}\right)+\text{ termeni de ordin superior} \quad (3.9)$$

Ţinând seama de relaţia (3.8) şi neglijând termenii de ordin superior din relaţia (3.9) relaţia de mai sus devine:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{d}}\right]\Bigg|_{{}^{m}\mathbf{d}^{(i-1)}}\cdot\left(\mathbf{d}^{*}-{}^{m}\mathbf{d}^{(i-1)}\right)={}^{m}\mathbf{F}-\mathbf{P}\left({}^{m}\mathbf{d}^{(i-1)}\right) \quad (3.10)$$

Având în vedere faptul că $\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{d}}\right]\Big|_{{}^{m}\mathbf{d}^{(i-1)}}$ reprezintă matricea de rigiditate tangentă a structurii corespunzătoare pasului *m* şi iteraţiei (*i*-1) şi notând cu $\Delta\mathbf{d}^{(i)}$ incrementul de deplasare corespunzător iteraţiei (*i*-1), relaţiile de recurenţă pe baza cărora se determină vectorul deplasărilor incrementale ce converge spre soluţia dorită, se scriu:

$$\Delta\mathbf{d}^{(i)}=\left[{}^{m}\mathbf{K}_{T}^{(i-1)}\right]^{-1}\cdot\left({}^{m}\mathbf{F}-{}^{m}\mathbf{P}^{(i-1)}\right) \quad (3.11a)$$

$${}^{m}\mathbf{d}^{(i)}={}^{m}\mathbf{d}^{(i-1)}+\Delta\mathbf{d}^{(i)} \quad (3.11b)$$

Relaţiile (3.11) reprezintă relaţiile de recurenţă ale metodei Newton-Raphson. Condiţiile iniţiale ale procesului iterativ, în cadrul unui increment de încărcare, sunt:

$$\begin{aligned}{}^{m}\mathbf{K}_{T}^{(o)}&={}^{(m-1)}\mathbf{K}_{T}\\ {}^{m}\mathbf{P}^{(0)}&={}^{(m-1)}\mathbf{P}\\ {}^{m}\mathbf{d}^{(0)}&={}^{(m-1)}\mathbf{d}\end{aligned} \quad (3.12)$$

În cadrul unui pas de încărcare iteraţiile continuă până la satisfacerea unui criteriu de convergenţă, respectiv pâna la disiparea integrala a forţelor neechilibrate (v. fig. 3.3.a). O caracteristică a acestui proces iterativ este că matricea de rigiditate tangentă a structurii trebuie reactualizată şi refactorizată pe parcursul iteraţiilor de echilibrare conducând la complicaţii ale procesului de calcul şi o mărire a timpului de calculator. Aşa cum s-a amintit anterior orice metodă incremental-iterativă presupune efectuarea a trei faze principale şi anume: faza *predictor*, faza *corector* şi faza de *verificare*, ponderea cea mai importantă în exactitatea metodei având-o etapa *corector*, în cadrul căreia se determină forţele interne din nodurile elementelor finite corspunzătoare noii stări de deformaţie a structurii, corespunzătoare deplasărilor incrementale determinate în cadrul etapei *predictor*. Aproximarea în ceea ce priveşte predicţia deplasărilor incrementale poate fi mai mult sau mai puţin exactă, esenţial în cadrul metodelor incremental-iterative fiind modul de calcul al forţelor interne ale structurii. Astfel sunt utlizate deseori metode incremental-iterative de tip Newton-Raphson modificată, care înlătură acest inconvenient, predicția deplasărilor realizându-se în acest caz pe baza unei matrici de rigiditate tangente, care nu se reactualizează în timpul iterărilor din cadrul unui pas de încărcare, coeficienții matricei de rigiditate tangentă având aceleaşi valori cu cele de la începutul iterațiilor, pe parcursul unui pas al încărcării (fig 3.3.b).

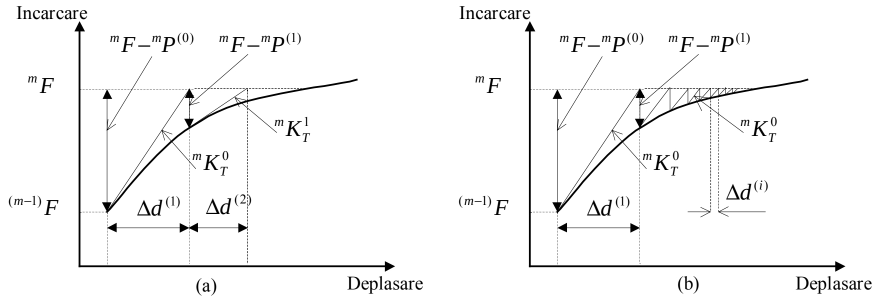

Fig. 3.3 Iterațiile în metoda Newton-Raphson pentru un sistem cu un singur grad de libertate:(a) Metoda generală; (b) Metoda modificată.

Pentru sistemul ecuațiilor de echilibru static (3.1), matricea de rigiditate tangentă a structurii rezultă de următoarea formă :

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{d}) = \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}}\left[\mathbf{K}_s(\mathbf{d}) \cdot \mathbf{d}\right] = \mathbf{K}_s(\mathbf{d}) + \frac{\partial \mathbf{K}_s(\mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} \cdot \mathbf{d} \tag{3.13}$$

care de altfel reprezintă relația generală dintre matricea tangentă de rigiditate şi cea secantă.

În metoda Newton-Raphson modificată aplicată în cazul modelului de analiză elasto-plastică de ordinul al II-lea, bazat pe metoda elementelor finite, prezentat în cadrul capitolului 2, procesul iterativ se exprimă sub următoarea formă:

$$^{m}\mathbf{K}_T \cdot \delta\mathbf{d}^{(i)} = {}^{(m+1)}\mathbf{F} - {}^{(m+1)}\mathbf{P}^{(i-1)} \tag{3.14}$$

unde ${}^{m}\mathbf{K}_T = {}^{m}\mathbf{K}_0 + {}^{m}\mathbf{K}_3$ reprezintă matricea de rigiditate tangentă evaluată la nivelul de încărcăre m păstrată constantă în timpul procesului iterativ; $\mathbf{P}^{(i-1)}$ = vectorul forțelor interne ale structurii; ${}^{(m+1)}\mathbf{F}$ = vectorul forțelor de referință corespunzător nivelului (m+1) de încărcare (noului nivel de încărcăre); $\delta\mathbf{d}^{(i)}$ reprezintă vectorul deplasărilor incrementale obținute în cadrul iteratiei i. Matricele de rigiditate $\mathbf{K}_j$, j=1,2 nu sunt luate în considerare în calculul matricei de rigiditate tangentă a structurii întrucât deplasările incrementale ce definesc aceste matrici sunt nule la începutul fiecărui pas de încărcare. Aceste matrici vor fi luate în considerare pe parcusrsul procesului iterativ doar în calculul forțelor interne ale structurii ${}^{(m+1)}\mathbf{P}^{(i)}$ respectiv la determinarea forțelor neechilibrate. Vectorul deplasărilor incrementale acumulate precum şi vectorul forțelor interne ale structurii, corespunzătoare acestor deplasări, pentru iterația i din cadrul pasului de încărcare (m+1) sunt definiţi de următoarele relaţii:

$$\Delta\mathbf{d}^{(i)} = \Delta\mathbf{d}^{(i-1)} + \delta\mathbf{d}^{(i)} \quad (3.15)$$

$$\Delta\mathbf{P}^{(i)} = \left({}^{m}\mathbf{K}_0^{(i)} + {}^{m}\mathbf{K}_3 + {}^{m}\mathbf{K}_1^{(i)} + {}^{m}\mathbf{K}_2^{(i)}\right)\cdot \Delta\mathbf{d}^{(i)} \quad (3.16)$$

Vectorul deplasărilor, vectorul forţelor interne ale structurii precum şi vectorul forţelor neechilibrate pe structură, acumulate în timpul iteraţiilor din cadrul unui pas de încărcare, sunt definite de următoarele relaţii:

$${}^{(m+1)}\mathbf{d}^{(i)} = {}^{m}\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d}^{(i)} \quad (3.17)$$

$${}^{(m+1)}\mathbf{P}^{(i)} = {}^{m}\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}^{(i)} \quad (3.18)$$

$${}^{(m+1)}\mathbf{R}^{(i)} = {}^{(m+1)}\mathbf{F} - {}^{(m+1)}\mathbf{P}^{(i)} \quad (3.19)$$

unde cu **R** s-a notat vectorul forţelor neechilibrate. Pentru *i=1* variabilele de mai sus iau valori egale cu cele determinate la sfârşitul precedentului pas de încărcare. Algoritmul metodei de iteraţie poate fi urmărit grafic în figura 3.18.

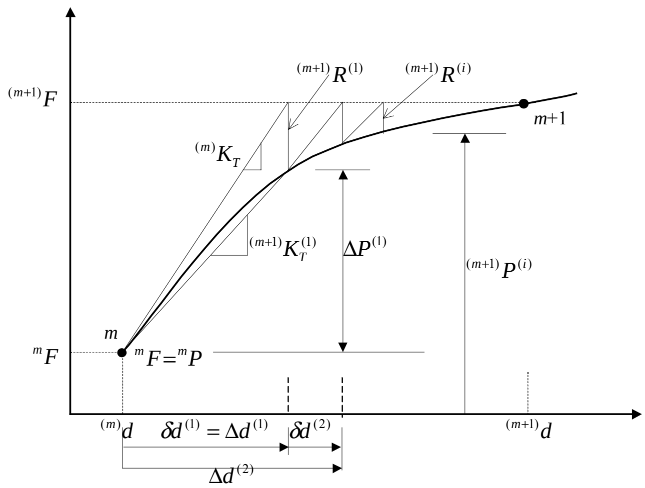

Figura 3.4 Conducerea iteraţiilor în metoda Newton-Raphson modificată.

3.3 METODA PAŞILOR CONTROLAŢI DE LUNGIMEA DE ARC. METODA CRISFIELD

Metodele de determinare a răspunsului neliniar al structurilor care utilizează parametrii de control în încărcări devin slab convergente şi deseori divergente în vecinatatea încărcării care produce colapsul global al structurii sau cel local al unui element al acesteia (matricea de rigiditate a structurii devine singulară). O posibilitate de a studia comportarea structurii şi în domeniul post critic, deci de a putea trasa curba încărcare-deplasare şi după punctul corespunzător încărcării limită, o reprezintă metodele bazate pe considerarea parametrului de control în deplasări. În principal aceste metode constau în dubla soluţionare a sistemului ecuațiilor de echilibru:

$$\mathbf{K}^{(i-1)} \cdot \left[\mathbf{d}^{P} \middle| \Delta\mathbf{d}^{R}\right]^{(i)} = \left[\mathbf{F} \middle| \mathbf{R}^{(i-1)}\right] \tag{3.20}$$

şi calculul parametrului de încărcare corespunzător unui pas al analizei plecând de la ecuația ce corespunde deplasării selectate $\mathbf{d}_k$:

$$\Delta\mathbf{d}_k^{(i-1)} = \Delta\lambda^{(i)} \cdot \mathbf{d}_k^{P(i)} + \Delta\mathbf{d}_k^{R(i)} \tag{3.21}$$

Pentru o valoare fixată a incrementului de deplasare, corespunzătoare deplasării selectate, $\Delta\mathbf{d}_k$, $\Delta\mathbf{d}_k^{(1)} = \Delta\mathbf{d}_k$ şi $\Delta\mathbf{d}_k^{(i)} = 0$ pentru i>1, următoarea formulă este evidentă dacă luăm în considerare faptul că $\Delta\mathbf{d}^{R(1)} = 0$:

$$\Delta\lambda^{(i)} = \begin{cases} \dfrac{\Delta\mathbf{d}_k}{\mathbf{d}_k^{P(1)}} & -\text{predictor pentru } i = 1 \\ -\dfrac{\Delta\mathbf{d}_k^{R(i)}}{\mathbf{d}_k^{P(i)}} & -\text{corector pentru } i > 1 \end{cases} \tag{3.22}$$

Asemănător cu metodele paşilor controlați de deplasări, metodele de tip "*arc-length*" tratează factorul de încărcare λ ca o variabilă (necunoscută) adițională în timpul iterațiilor de echilibrare astfel încât poate fi explorat comportamentul structurii în apropierea colapsului cât şi după atingerea acestuia surprinzând şi fenomenele de *snap-through* şi *snap-back* ce pot apărea în domeniul post-critic de comportare. Factorul incremental de încărcare este guvernat de o ecuație de constrângere suplimentară care poate fi pusă sub următoarea formă generală (Crisfield, 1981):

$$\Delta\mathbf{d}_i^T \cdot \Delta\mathbf{d}_i + A_0 \cdot \Delta\lambda_i^2 \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \Delta l^2 \tag{3.23}$$

unde $\Delta\mathbf{d}_i$=vectorul deplasărilor incrementale propuse în cadrul iterarației de echilibrare i; A_0 reprezintă un parametru scalar ce guvernează contribuția relativă dată de deplasări şi de incrementele de încărcare; $\Delta\lambda_i$= predicția factorului incremental de încărcare; **F** reprezintă vectorul forțelor extrioare, de referință, considerate acționând doar în nodurile de discretizare ale structurii; Δl reprezintă lungimea specificată a arcului pentru pasul curent al analizei. Noua soluție spre care se tinde în procesul iterativ trebuie căutată în vecinatatea ultimului punct de echilibru în spațiul definit de o suprafață elipsoidală, ce înconjoară ultimul punct de echilibru din spațiul încărcare-deplasare, mărimea fiind determinată de lungimea de arc prescrisă.

În calculul practic, la iterația de echilibrare i, valorile deplasărilor incrementale $\Delta\mathbf{d}_i$ sunt determinate pe baza ecuației (3.23), iar calculul structural este condus în continuare pentru aflarea forțelor neechilibrate, $\mathbf{R}_i$, ca diferență dintre încărcarea exterioară propusă, $\lambda \cdot \mathbf{F}$, şi cea interioară calculată pe baza deplasărilor totale $\mathbf{d}_i$

obținute. În cazul în care, vectorul forțelor neechilibrate devine suficient de mic, procesul iterativ este oprit, în caz contrar se alege un nou set de deplasări incrementale pe baza ecuației (3.23) şi pe baza estimărilor făcute în cadrul iterației *i*, continuând calculul cu următoarea iterație (*i*+1).

Riks şi Wempner au adoptat o variantă liniarizată a ecuației de constrângere (3.23) pentru iterația (*i*+1), reprezentată de următoarea ecuație:

$$\delta_i^T \cdot \Delta \mathbf{d}_i + A_0 \cdot \delta\lambda_i \cdot \Delta\lambda_i \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = 0 \tag{3.24}$$

unde δ_i^T şi $\delta\lambda_i$ reprezintă corecțiile ce se fac asupra deplasărilor incrementale $\Delta \mathbf{d}_i$ respectiv factorului incremental de încărcare $\Delta\lambda_i$.

În metoda originală propusă de Riks şi Wempner (Riks 1972, Wempner 1971) ecuația de constrângere (3.23) a fost adaugată sistemului de *n* ecuații de echilibru, $\mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{d} = \Delta \mathbf{R}$, rezultând un sistem extins $\widetilde{K} \cdot \Delta \widetilde{\mathbf{d}} = \Delta \widetilde{\mathbf{R}}$ având (*n*+1) ecuații şi (*n*+1) necunoscute (deplasările generalizate corespunzătoare celor *n* grade de libertate ale structurii respectiv factorul de încărcare λ). Această formulare reduce eficiența soluționării întrucât în acest caz matricea coeficienților sistemului extins îşi pierde proprietatea de simetrie. Structura matricei extinse şi a vectorilor corespunzători este arătată în figura 3.5.

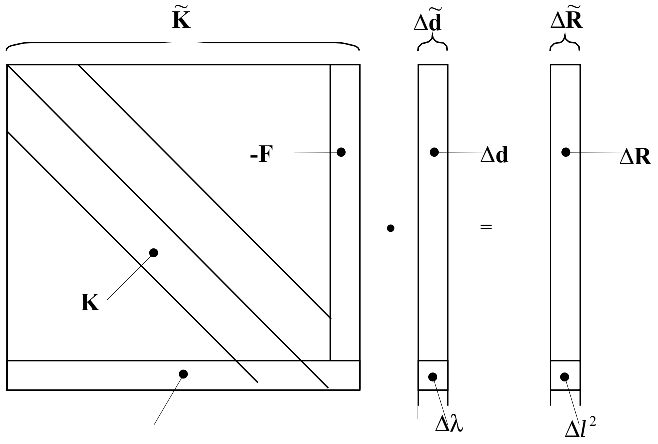

Fig. 3.5. Structura sistemului de ecuații extins.

$$\Delta \mathbf{d}^T + A_0 \cdot \Delta\lambda \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \tag{3.25}$$

Ramm (1981) şi Crisfield (1981, 1982, 1983, 1984) au îmbunătățit această metodă propunând o metodă indirectă de soluționare pentru ecuația suplimentară de constrângere. În această metodă relația dintre $\boldsymbol{\delta}_i$ şi $\delta\lambda_i$ este rescrisă astfel:

$$\boldsymbol{\delta}_i = \mathbf{K}_T^{-1} \cdot \mathbf{R}_i + \delta\lambda_i \cdot \mathbf{K}_T^{-1} \cdot \mathbf{F} \tag{3.26}$$

$$\boldsymbol{\delta}_i = \boldsymbol{\delta}_{Ri} + \delta\lambda_i \cdot \boldsymbol{\delta}_F \tag{3.27}$$

unde $\boldsymbol{\delta}_{Ri} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{R}_i$ reprezintă vectorul deplasărilor rezultat în urma eliminarii forțelor neechilibrate; $\boldsymbol{\delta}_F = \mathbf{K}_T^{-1} \cdot \mathbf{F}$ reprezintă vectorul deplasărilor de referință calculat la fiecare reactualizare a matricei de rigiditate tangentă a structurii. Predicția deplasărilor incrementale la iterația (i+1) este realizată pe baza următoarei relații:

$$\Delta \mathbf{d}_{i+1} = \Delta \mathbf{d}_i + \boldsymbol{\delta}_{Ri} + \delta\lambda_i \cdot \boldsymbol{\delta}_F \tag{3.28}$$

Substituind $\Delta \mathbf{d}_{i+1}$ în ecuația de constrângere (3.23) şi considerând A_0=0 (valoare care este frecvent adoptată) rezultă următoarea ecuație de gradul al II-lea în necunoscuta $\delta\lambda_i$:

$$a_1 \cdot \delta\lambda_i^2 + a_2 \cdot \delta\lambda_i + a_3 = 0 \tag{3.29}$$

în care coeficienții ecuației dați de următoarele relații:

$$\begin{aligned} a_1 &= \boldsymbol{\delta}_F^T \cdot \boldsymbol{\delta}_F \\ a_2 &= 2 \cdot \boldsymbol{\delta}_F^T \cdot \left(\Delta \mathbf{d}_i + \boldsymbol{\delta}_{Ri}\right) \\ a_3 &= \left(\Delta \mathbf{d}_i + \boldsymbol{\delta}_{Ri}\right)^T \cdot \left(\Delta d_i + \boldsymbol{\delta}_{Ri}\right) - \Delta l^2 \end{aligned} \tag{3.30}$$

sunt determinați la iterația i de echilibrare, astfel încât ecuația (3.29) poate fi acum rezolvată rezultând două valori (de obicei reale) pentru parametrul $\delta\lambda_i$. Alegând una dintre valorile astfel estimate pentru factorul incremental de încărcare se pot estima pe baza relației (3.28) deplasările incrementale pentru următoarea iterație. Alegerea uneia dintre rădăcinile ecuației (3.29) (în cazul în care acestea rezultă reale) de determinare a factorului de încărcare, corespunzător următoarei configurații de echilibru a structurii este în general o problemă dificilă, deoarece fiecare dintre cele două soluții corespund unui punct de echilibru pe curba încărcare-deplasare, însă doar una dintre soluții corespunde adevăratei configurații de echilibru. Criteriul de selecție propus de Crisfield constă în determinarea rădăcinii ce corespunde celei mai mici valori a produsului $\left(\Delta \mathbf{d}_{i+1}^T \cdot \Delta \mathbf{d}_i\right)$ adică a valorii ce corespunde celui mai mic unghi dintre vectorii $\Delta \mathbf{d}_i$ şi $\Delta \mathbf{d}_{i+1}$. Există situații în care ecuația (1.29) nu admite întotdeauna soluții în mulțimea numerelor reale. În cazul unei asemenea situații printr-o micşorare a lungimii de arc şi refacerea calculelor pornind de la ultimul punct de echilibru cu noua lungime de arc ($\Delta l / 2$, $\Delta l / 4$, ...) se poate evita apariția acestui fenomen. Pe lânga această metodă simplă, de reducere a lungimii de arc, care nu este întotdeauna eficientă, în literatura de specialitate sunt oferite şi alte metode, una dintre acestea, propusă de Lam & Morley 1992, va fi prezentată în cadrul capitolului 5.

Metoda Crisfield, descrisă anterior, aplicată pentru soluționarea sistemului de ecuații neliniare de tip (3.1) ce exprimă echilibrul static al întregii structuri, va fi exemplificată în continuare sub forma grafică. Aceasta presupune mai întâi o rescriere a ecuației (3.1) sub următoarea formă incremental-iterativă:

$${}^{m}\mathbf{K}_T \cdot \delta\mathbf{d}^{(i)} = {}^{(m+1)}\lambda^{(i)} \cdot \mathbf{F} - {}^{(m+1)}\mathbf{P}^{(i-1)} \tag{3.31}$$

unde ${}^{m}\mathbf{K}_{T} = {}^{m}\mathbf{K}_{0} + {}^{m}\mathbf{K}_{3}$ reprezintă matricea de rigiditate tangentă evaluată la nivelul de încărcare *m* păstrată constantă în timpul procesului iterativ de echilibrare; $\mathbf{P}^{(i-1)}$ = vectorul forțelor interne ale structurii; ${}^{(m+1)}\lambda^{(i)}$ = factorul de încărcare incremental corespunzător nivelului (*m*+1) de încărcare (noului nivel de încărcare) şi iterației de echilibrare *i*; $\delta\mathbf{d}^{(i)}$ reprezintă vectorul deplasărilor incrementale estimate în cadrul iteratiei *i*. Matricele de rigiditate $\mathbf{K}_{j}$, *j*=1,2 nu sunt luate în considerare în calculul matricei de rigiditate tangentă a structurii întrucât deplasările incrementale ce definesc aceste matrici sunt nule la începutul fiecărui pas de încărcare. Aceste matrici vor servi la calculul forțelor interne ale structurii ${}^{(m+1)}\mathbf{P}^{(i)}$, respectiv la calculul forțelor neechilibrate pe structură pe parcursul procesului iterativ.

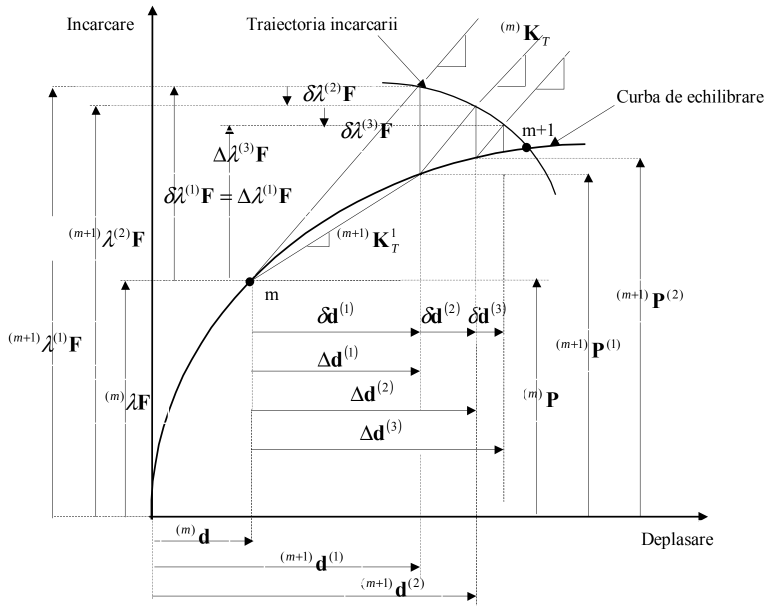

Fig. 3.6 Conducerea iterațiilor în metoda Crisfield.

Vectorii deplasărilor incrementale acumulate şi a forțelor interne ale structurii, corespunzătoare factorului incremental de încărcare $\Delta\lambda_i$, pentru iterația *i* din cadrul pasului de încărcare (*m*+1) sunt definiți de următoarele relații:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{d}^{(i)} &= \Delta\mathbf{d}^{(i-1)} + \delta\mathbf{d}^{(i)} \\ \Delta\mathbf{P}^{(i)} &= \left({}^{m}\mathbf{K}_{0}^{(i)} + {}^{m}\mathbf{K}_{3} + {}^{m}\mathbf{K}_{1}^{(i)} + {}^{m}\mathbf{K}_{2}^{(i)}\right)\cdot\Delta\mathbf{d}^{(i)} \\ \Delta\lambda^{(i)} &= \Delta\lambda^{(i-1)} + \delta\lambda^{(i)} \end{aligned} \tag{3.32}$$

unde $\Delta\mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{0}$ şi $\Delta\lambda^{(0)} = 0$. Prin indicele superior *i* corespunzător matricelor de rigiditate din relațiile de mai sus se evidențiează faptul că aceste matrici sunt reactualizate la fiecare nouă iterație şi anume: matricea de rigiditate $\mathbf{K}_0$ prin reevaluarea distribuției zonelor plastice din secțiunile corespunzătoare punctelor de integrare numerică din lungul elementelor finite ca urmare a modificarii câmpului de deplasări; matricele $\mathbf{K}_1$ şi $\mathbf{K}_2$ care sunt determinate în funcție de noile valori ale deplasărilor incrementale.

Vectorul deplasărilor, vectorul forțelor interne ale structurii precum şi vectorul forțelor neechilibrate pe structură acumulate la sfirşitul unui pas de încărcare sunt definite de următoarele relații:

$$^{(m+1)}\mathbf{d}^{(i)} = {}^{m}\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d}^{(i)} \tag{3.33}$$

$$^{(m+1)}\lambda^{(i)} = {}^{m}\lambda + \Delta\lambda^{(i)} \tag{3.34}$$

$$^{(m+1)}\mathbf{P}^{(i)} = {}^{m}\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}^{(i)} \tag{3.35}$$

$$^{(m+1)}\mathbf{R}^{(i)} = {}^{(m+1)}\lambda^{(i)} \cdot \mathbf{F} - {}^{(m+1)}\mathbf{P}^{(i)} \tag{3.36}$$

unde cu **R** s-a notat vectorul forțelor neechilibrate. Pentru i=1 variabilele de mai sus iau valori egale cu cele determinate la sfârşitul precedentului pas de încărcare.